3変数量子Garnier系のTakano理論について

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
皇學館大学 教育学部 教育学科
上野祐一 (Yuichi UENO) *

概 要

本稿では，3変数量子Garnier系 G(1,1,1,1,1,1) について正則性による特徴付けを行う．また，3変数の場合の結果をもとに，一般の n 変数量子Garnier系についても正則性による特徴付けの一般化を目指す．

1 Painlevé 方程式のTakano理論とその量子化

Painlevé 方程式 $P_{\rm J}$ $({\rm J}={\rm I},\cdots,{\rm VI})$ とは動く特異点は極のみ（これをPainlevé 性と呼ぶ）である2階の非線型常微分方程式である [16, 1]．1980年代のOkamotoの一連の研究により，Painlevé 方程式のHamilton構造が明らかにされ，Bäcklund変換として作用するAffineWeyl群対称性が示された [15]．また，Okamotoは, 各方程式 $P_{\rm J}$ に対してその初期値空間 (解を一意的にパラメトライズする空間) を定義しblow-upにより構成した [14].

一方で，1990年代後半Takano等により各Painlevé 方程式 $P_{\rm J}$ $({\rm J}={\rm II},\cdots,{\rm VI})$ が，その初期値空間から一意的に再現できることが示された [23, 20, 11, 12, 13]．すなわち，Okamoto初期値空間は，元の chart(q,p) にいくつかの chart(x_i,y_i) を追加し，それらをある双有理正準変換により張り合わせることにより構成できる．そして，元の chart(q,p) と追加した chart(x_i,y_i) の全てにおいて，Hamiltonianが正準変数の多項式になる．さらに上記のように構成した初期値空間において，全てのchartで正則なHamiltonianにより記述されるHamilton系はPainlevé 方程式に限るという結果である．これをTakano理論と呼ぶ．古典のPainlevé 方程式は正準変数 q,p の多項式Hamiltonianを持つ次のようなHamilton系で書ける．

$$\frac{df}{dt}=\{f,H_{\rm J}\}+\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{1}$$

ここで，$\{\phi,\psi\}:=\dfrac{\partial\phi}{\partial p}\dfrac{\partial\psi}{\partial q}-\dfrac{\partial\phi}{\partial q}\dfrac{\partial\psi}{\partial p}$ はPoisson括弧であり，f は正準変数 q,p の多項式である．このようにPainlevé 方程式はHamilton系で書けるため，Poisson括弧を交換子に置き換えるという意味での量子化が可能である．それを実際にPainlevé 方程式 $P_{\rm J}$ $({\rm J}={\rm II},\cdots,{\rm VI})$ に対して行ったものが [28] である．

2 Garnier系と2変数量子Garnier系

n 変数Garnier系 [2] とは，$n+3$ 個の特異点と n 個の見かけ上の特異点を持つRiemann球面 $\mathbb{P}^1$ 上の2階Fuchs型常微分方程式のモノドロミー保存変形から得られる n 個の時間変数を持つ

*E-mail:y-ueno@kogakkan-u.ac.jp

Hamilton 系である．Garnier 系は Painlevé 方程式の多変数拡張であり，$n=1$ のとき Painlevé VI 型方程式に一致する．2 変数退化 Garnier 系については Kimura により構築されており，5 の分割に対応する次の分割がある [7, 9, 10]. [1]

$$
\begin{tikzcd}
 & & (1,2,2) \arrow[r] \arrow[dr] & (2,3) \arrow[dr] & \\
(1,1,1,1,1) \arrow[r] & (1,1,1,2) \arrow[ur] \arrow[r] & (1,1,3) \arrow[ur] \arrow[r] & (1,4) \arrow[r] & (5)
\end{tikzcd}
$$

これらの各場合において，Sasano [17, 18] や Suzuki [21, 22] により Painlevé 方程式と同様の初期値空間についての研究が行われている．ここでは，G(1,1,1,1,1) の場合における Sasano による構成方法について見ることとする．

Garnier 系 G(1,1,1,1,1) についての多項式 Hamiltonian については Kimura と Okamoto [10] により導入された．Sasano [17, 18] による表記方法に従い，次のような形の Hamilton 系を考える ([24, 25, 26, 27] 参照)．

$$
\begin{aligned}
dq_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_1}dt_1 + \frac{\partial H_2}{\partial p_1}dt_2, \quad dp_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial q_1}dt_1 - \frac{\partial H_2}{\partial q_1}dt_2,\\
dq_2 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_2}dt_1 + \frac{\partial H_2}{\partial p_2}dt_2, \quad dp_2 = -\frac{\partial H_1}{\partial q_2}dt_1 - \frac{\partial H_2}{\partial q_2}dt_2,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで，Hamiltonian $H_i (i=1,2)$, H_{VI}, 変換 π は次で与えられる．[2]

$$
\begin{aligned}
H_1 \;&=\; H_{\mathrm{VI}}(q_1,p_1,t;\alpha_4+\alpha_6,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_5,\alpha_3)\\
&\quad +(2\alpha_1+\alpha_2)\frac{q_1q_2p_2}{t_1(t_1-1)} + \alpha_3\{\frac{p_1}{t_1-t_2} - \frac{(t_2-1)p_2}{(t_1-t_2)(t_1-1)}\}q_2 + \alpha_4\frac{t_2(p_2-p_1)q_1}{t_1(t_1-t_2)}\\
&\quad +\{\frac{2(t_2-1)p_1p_2}{(t_1-t_2)(t_1-1)} - \frac{t_1p_1^2+t_2p_2^2}{t_1(t_1-t_2)} + \frac{(2q_1p_1+q_2p_2)p_2}{t_1(t_1-1)}\}q_1q_2,\\
H_2 \;&=\; \pi(H_1),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\pi : (q_1,p_1,q_2,p_2,t_1,t_2;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6) \to (q_2,p_2,q_1,p_1,t_2,t_1;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6), \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&H_{\mathrm{VI}}(q,p,t;\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_4) = \frac{1}{t(t-1)}\{q(q-1)(q-t)p^2\\
&\quad -\{(\tilde{\alpha}_0-1)q(q-1)+\tilde{\alpha}_3q(q-t)+\tilde{\alpha}_4(q-1)(q-t)\}p + \tilde{\alpha}_2(\tilde{\alpha}_1+\tilde{\alpha}_2)(q-t)\}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Garnier 系 G(1,1,1,1,1) に対して，Sasano により構築された正準変換は次の通り：

$$
\begin{aligned}
r_1 :\quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2y_1 - x_1x_2y_2 - \alpha_1x_1, \quad q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1y_2,\\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2p_1 - q_1q_2p_2 - \alpha_1q_1, \quad x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = q_1p_2.\\
r_2 :\quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2y_1 - x_1x_2y_2 - \alpha_2x_1, \quad q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1y_2,\\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2p_1 - q_1q_2p_2 - \alpha_2q_1, \quad x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = q_1p_2.\\
r_3 :\quad & q_1 = -x_1y_1^2 + \alpha_3y_1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = y_2,
\end{aligned}
$$

[1] また，2 変数 Garnier 系の他の退化については次が知られている [4, 5, 6].

[2] 方程式 (5) における Hamiltonian H_{VI} は Fuchs の関係式 $\tilde{\alpha}_0+\tilde{\alpha}_1+2\tilde{\alpha}_2+\tilde{\alpha}_3+\tilde{\alpha}_4=1$ に従う Painlevé VI 型方程式の Hamiltonian である．

$$x_1 = -q_1p_1^2 + \alpha_3 p_1, \quad y_1 = \frac{1}{p_1}, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2.$$

$$r_4: \quad q_1 = x_1, \quad p_1 = y_1, \quad q_2 = -x_2y_2^2 + \alpha_4 y_2, \quad p_2 = \frac{1}{y_2},$$

$$x_1 = q_1, \quad y_1 = p_1, \quad x_2 = -q_2p_2^2 + \alpha_4 p_2, \quad y_2 = \frac{1}{p_2}.$$

$$r_5: \quad q_1 = -x_1y_1^2 - x_2 + \alpha_5 y_1 + 1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = \frac{1}{y_1} + y_2,$$

$$x_1 = -q_1p_1^2 - q_2p_1^2 + p_1^2 + \alpha_5 p_1, \quad y_1 = \frac{1}{p_1}, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2 - p_1.$$

$$r_6: \quad q_1 = -x_1y_1^2 - \frac{t_1}{t_2}x_2 + \alpha_6 y_1 + t_1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = \frac{t_1}{t_2}\frac{1}{y_1} + y_2,$$

$$x_1 = -q_1p_1^2 - \frac{t_1}{t_2}q_2p_1^2 + t_1p_1^2 + \alpha_6 p_1, \quad y_1 = \frac{1}{p_1}, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2 - \frac{t_1}{t_2}p_1. \tag{6}$$

このとき，次が成立する [17].

Theorem 2.1. *[17]* 正準変数 q_1, p_1, q_2, p_2 に関する *Hamiltonian* $H_i(i = 1, 2)$ を持つ多項式 *Hamilton* 系を考え，以下を仮定する.

1. *Hamiltonian* H_i の次数の合計は q_1, p_1, q_2, p_2 に関して 5 次.
2. (6) の各変換 $r_i(i = 1, \ldots, 6)$ の下で，系 (2) は多項式 *Hamiltonian* を持つ *Hamilton* 系に再び変換される.

このとき，そのような系は系 (2)-(5) に一致し，ただ一つである.

これらを次のように量子化したものを考える.

$$dq_i = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2}[q_i, H_j]dt_i, \quad dp_i = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2}[p_i, H_j]dt_i \tag{7}$$

ここで，[,] は次を満たす交換子である: $[A, B] = AB - BA$. また，q_1, p_1, q_2, p_2 は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}h$ $(h \in \mathbb{C})$ を満たす量子正準変数であり，$t_i(i = 1, 2)$ は 2 つの独立な時間発展の変数である. そして，G(1,1,1,1,1) 同様，G(1,1,1,2), G(1,1,3), G(1,2,2) , G(1,4) に対しては Sasano の古典的な変換を，G(2,3), G(5) については Suzuki の古典的な変換をそのまま用いて，正則性の条件により Hamiltonian $H_i(i = 1, 2)$ を決定する. このとき，G(1,1,1,1,1), G(1,1,1,2), G(1,1,3), G(1,2,2) , G(1,4), G(2,3), G(5) の各場合に対して次が成り立つ.

Theorem 2.2. *[29]* 量子正準変数 q_1, p_1, q_2, p_2 に関する非可換 *Hamiltonian* $H_i(i = 1, 2)$ を持つ多項式 *Hamilton* 系 (7) を考え，以下を仮定する：

1. *Hamiltonian* H_i の次数の合計は q_1, p_1, q_2, p_2 に関して 5 次.
2. 対応する変換 r_i の下で，系 (7) は多項式 *Hamiltonian* を持つ *Hamilton* 系に再び変換される.

このとき，そのような系はただ一つに決まる.

3　3変数量子 Garnier 系

次に，3 変数量子 Garnier 系について考える．これらを適切に定義するために，次のような量子 Hamilton 系を考える．

$$dq_i = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{3}[q_i, H_j]dt_i, \quad dp_i = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{3}[p_i, H_j]dt_i \tag{8}$$

ここで， $q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3$ は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}h \ (h \in \mathbb{C})$ を満たす量子正準変数であり，$t_i (i = 1, 2, 3)$ は 3 つの独立な時間変数である．Hamiltonian $H_i (i = 1, 2, 3)$ を正則性を用いて決定することを考える．これを行うために，適切な方法により量子正準変換を定義する必要があるが，Sasano の古典的な変換 [18] ([8] 参照). をそのまま量子化して得られる次の量子変換 $r_1, \ldots, r_7$ を考える．

$$\begin{aligned}
r_1: \quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_3 y_3 - \alpha_1 x_1, \\
& q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1 y_2, \quad q_3 = \frac{x_3}{x_1}, \quad p_3 = x_1 y_3, \\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - q_1 q_3 p_3 - \alpha_1 q_1, \\
& x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = q_1 p_2, \quad x_3 = \frac{q_3}{q_1}, \quad y_3 = q_1 p_3, \\
r_2: \quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_3 y_3 - \alpha_2 x_1, \\
& q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1 y_2, \quad q_3 = \frac{x_3}{x_1}, \quad p_3 = x_1 y_3, \\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - q_1 q_3 p_3 - \alpha_2 q_1, \\
& x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = q_1 p_2, \quad x_3 = \frac{q_3}{q_1}, \quad y_3 = q_1 p_3, \\
r_3: \quad & q_1 = -x_1 y_1^2 + \alpha_3 y_1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = y_2, \quad q_3 = x_3, \quad p_3 = y_3, \\
& x_1 = -q_1 p_1^2 + \alpha_3 p_1, \quad y_1 = \frac{1}{p_1}, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2, \quad x_3 = q_3, \quad y_3 = p_3, \\
r_4: \quad & q_1 = x_1, \quad p_1 = y_1, \quad q_2 = -x_2 y_2^2 + \alpha_4 y_2, \quad p_2 = \frac{1}{y_2}, \quad q_3 = x_3, \quad p_3 = y_3, \\
& x_1 = q_1, \quad y_1 = p_1, \quad x_2 = -q_2 p_2^2 + \alpha_4 p_2, \quad y_2 = \frac{1}{p_2}, \quad x_3 = q_3, \quad y_3 = p_3, \\
r_5: \quad & q_1 = x_1, \quad p_1 = y_1, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = y_2, \quad q_3 = -x_3 y_3^2 + \alpha_5 y_3, \quad p_3 = \frac{1}{y_3}, \\
& x_1 = q_1, \quad y_1 = p_1, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2, \quad x_3 = -q_3 p_3^2 + \alpha_5 p_3, \quad y_3 = \frac{1}{p_3}, \\
r_6: \quad & q_1 = -x_1 y_1^2 - x_2 y_2^2 - x_3 y_1^2 + y_1^2 - x_2 - x_3 + \alpha_6 y_1 + 1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \\
& q_2 = x_2, \quad p_2 = \frac{1}{y_1} - y_1 + y_2, \quad q_3 = x_3, \quad p_3 = \frac{1}{y_1} - y_1 + y_3, \\
& x_1 = -q_1 p_1^2 - q_2 p_2^2 - q_3 p_1^2 + p_1^2 - q_2 - q_3 + \alpha_6 p_1 + 1, \quad y_1 = \frac{1}{p_1}, \\
& x_2 = q_2, \quad y_2 = \frac{1}{p_1} - p_1 + p_2, \quad x_3 = q_3, \quad y_3 = \frac{1}{p_1} - p_1 + p_3,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_7:\quad & q_1=-x_1y_1^2-\frac{t_1}{t_2}x_2y_1^2-\frac{t_1}{t_3}x_3y_1^2+t_1y_1^2-\frac{t_1}{t_2}x_2-\frac{t_1}{t_3}x_3+\alpha_7y_1+t_1,\quad p_1=\frac{1}{y_1},\\
& q_2=x_2,\quad p_2=\frac{t_1}{t_2}(\frac{1}{y_1}-y_1)+y_2,\quad q_3=x_3,\quad p_3=\frac{t_1}{t_3}(\frac{1}{y_1}-y_1)+y_3,\\
& x_1=-q_1p_1^2-\frac{t_1}{t_2}q_2p_1^2-\frac{t_1}{t_3}q_3p_1^2+t_1y_1^2-\frac{t_1}{t_2}q_2-\frac{t_1}{t_3}q_3+\alpha_7p_1+t_1,\quad y_1=\frac{1}{p_1},\\
& x_2=q_2,\quad y_2=\frac{t_1}{t_2}(\frac{1}{p_1}-p_1)+p_2,\quad x_3=q_3,\quad y_3=\frac{t_1}{t_3}(\frac{1}{p_1}-p_1)+p_3,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

変換 (9) に対して，次が成り立つ．

Theorem 3.1. 量子正準変数 $q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3$ に関する非可換 *Hamiltonian* $H_i(i=1,2,3)$ を持つ多項式 *Hamilton* 系 (8) を考え，以下を仮定する：

1. *Hamiltonian* H_i の次数の合計は $q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3$ に関して 5 次.
2. 対応する変換 $r_i(i=1,\dots,7)$ の下で，系 (8) は多項式 *Hamiltonian* を持つ *Hamilton* 系に再び変換される.

このとき，そのような系はただ一つに決まる.

証明については，2 変数の場合と同様 [29] のため省略する．以下に得られる Hamiltonian H_1, H_2, H_3 を述べる．ただし，$-h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=\kappa$ とする．

The Hamiltonian H_1 for t_1-flow.

$$
\begin{aligned}
\kappa H_1 \;=\; & \frac{q_1^3p_1^2}{t_1(t_1-1)}+\frac{2q_1^2q_2p_1p_2}{t_1(t_1-1)}+\frac{2q_1^2q_3p_1p_3}{t_1(t_1-1)}+\frac{q_1q_2^2p_2^2}{t_1(t_1-1)}+\frac{2q_1q_2q_3p_2p_3}{t_1(t_1-1)}+\frac{q_1q_3^2p_3^2}{t_1(t_1-1)}\\
& -\frac{(t_1+1)}{t_1(t_1-1)}q_1^2p_1^2-\frac{q_1q_2p_1^2}{t_1-t_2}+\frac{2(t_2-1)}{(t_1-1)(t_1-t_2)}q_1q_2p_1p_2-\frac{t_2q_1q_2p_2^2}{t_1(t_1-t_2)}-\frac{q_1q_3p_1^2}{t_1-t_3}\\
& +\frac{2(t_3-1)}{(t_1-1)(t_1-t_3)}q_1q_3p_1p_3-\frac{t_3q_1q_3p_3^2}{t_1(t_1-t_3)}+\frac{h-\alpha_1-\alpha_2}{t_1(t_1-1)}(q_1^2p_1+q_1q_2p_2+q_1q_3p_3)+\frac{q_1p_1^2}{t_1-1}\\
& +(\frac{h-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3}{t_1-1}-\frac{h-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6}{t_1}-\frac{\alpha_4}{t_1-t_2}-\frac{\alpha_5}{t_1-t_3})q_1p_1+\frac{\alpha_4t_2q_1p_2}{t_1(t_1-t_2)}\\
& +\frac{\alpha_5t_3q_1p_3}{t_1(t_1-t_3)}+\frac{\alpha_3q_2p_1}{t_1-t_2}-\frac{\alpha_3(t_2-1)q_2p_2}{(t_1-1)(t_1-t_2)}+\frac{\alpha_3q_3p_1}{t_1-t_3}-\frac{\alpha_3(t_3-1)}{(t_1-1)(t_1-t_3)}q_3p_3\\
& +\frac{\alpha_1\alpha_2q_1}{t_1(t_1-1)}-\frac{\alpha_3p_1}{t_1-1}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

The Hamiltonian H_2 for t_2-flow.

$$\begin{aligned}
\kappa H_2 \;=\;& \frac{q_1^2 q_2 p_1 p_2}{t_2(t_2-1)} + \frac{2q_1 q_2^2 p_1 p_2}{t_2(t_2-1)} + \frac{2q_1 q_2 q_3 p_1 p_3}{t_2(t_2-1)} + \frac{q_2^3 p_2^2}{t_2(t_2-1)} + \frac{2q_2^2 q_3 p_2 p_3}{t_2(t_2-1)} + \frac{q_2 q_3^2 p_3^2}{t_2(t_2-1)} \\
&+ \frac{t_1 q_1 q_2 p_1^2}{t_2(t_1-t_2)} - \frac{2(t_1-1)}{(t_2-1)(t_1-t_2)} q_1 q_2 p_1 p_2 + \frac{q_1 q_2 p_2^2}{t_1-t_2} - \frac{(t_2+1)}{t_2(t_2-1)} q_2^2 p_2^2 - \frac{q_2 q_3 p_2^2}{t_2-t_3} \\
&+ \frac{2(t_3-1)}{(t_2-1)(t_2-t_3)} q_2 q_3 p_2 p_3 - \frac{t_3 q_2 q_3 p_3^2}{t_2(t_2-t_3)} + \frac{h-\alpha_1-\alpha_2}{t_2(t_2-1)}(q_1 q_2 p_1 - q_2^2 p_2 - q_2 q_3 p_3) + \frac{q_2 p_2^2}{t_2-1} \\
&+ \frac{\alpha_4(t_1-1)}{(t_2-1)(t_1-t_2)} q_1 p_1 - \frac{\alpha_4 q_1 p_2}{t_1-t_2} - \frac{\alpha_3 t_1 q_2 p_1}{t_2(t_1-t_2)} + \frac{\alpha_5 t_3 q_2 p_3}{t_2(t_2-t_3)} + \frac{\alpha_4 q_3 p_2}{t_2-t_3} - \frac{\alpha_4(t_3-1)}{(t_2-1)(t_2-t_3)} q_3 p_3 \\
&+ \left(\frac{h-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4}{t_2-1} - \frac{h-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6}{t_2} - \frac{\alpha_3}{t_2-t_1} - \frac{\alpha_5}{t_2-t_3}\right) q_2 p_2 \\
&+ \frac{\alpha_1 \alpha_2 q_2}{t_2(t_2-1)} - \frac{\alpha_4 p_2}{t_2-1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

The Hamiltonian H_3 for t_3-flow.

$$\begin{aligned}
H_3 \;=\;& \frac{q_1^2 q_3 p_1^2}{t_3(t_3-1)} + \frac{2q_1 q_2 q_3 p_1 p_2}{t_3(t_3-1)} + \frac{2q_1 q_3^2 p_1 p_3}{t_3(t_3-1)} + \frac{2q_2 q_3^2 p_2 p_3}{t_3(t_3-1)} + \frac{q_2^2 q_3 p_2^2}{t_3(t_3-1)} + \frac{q_3^3 p_3^2}{t_3(t_3-1)} \\
&+ \frac{t_1 q_1 q_3 p_1^2}{t_3(t_1-t_3)} - \frac{2(t_1-1)}{(t_3-1)(t_1-t_3)} q_1 q_3 p_1 p_3 + \frac{q_1 q_3 p_3^2}{t_1-t_3} + \frac{2(t_3-1)}{(t_3-1)(t_3-t_2)} q_2 q_3 p_2 p_3 - \frac{t_2 q_2 q_3 p_2^2}{t_3(t_3-t_2)} \\
&+ \frac{q_2 q_3 p_3^2}{t_2-t_3} - \frac{(t_3+1)}{t_3(t_3-1)} q_3^2 p_3^2 - \frac{h-\alpha_1-\alpha_2}{t_3(t_3-1)}(q_1 q_3 p_1 + q_2 q_3 p_2 + q_3^2 p_3) + \frac{q_3 p_3^2}{t_3-1} \\
&+ \frac{\alpha_5(t_1-1)}{(t_3-1)(t_1-t_3)} q_1 p_1 - \frac{\alpha_5 q_1 p_3}{t_1-t_3} - \frac{\alpha_5(t_2-1)}{(t_3-1)(t_3-t_2)} q_2 p_2 - \frac{\alpha_5 q_2 p_3}{t_2-t_3} - \frac{\alpha_3 t_1 q_3 p_1}{t_3(t_1-t_3)} + \frac{\alpha_4 t_2 q_3 p_2}{t_3(t_3-t_2)} \\
&+ \left(\frac{h-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_5}{t_3-1} - \frac{h-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6}{t_3} - \frac{\alpha_3}{t_3-t_1} - \frac{\alpha_4}{t_3-t_2}\right) q_3 p_3 \\
&+ \frac{\alpha_1 \alpha_2 q_3}{t_3(t_3-1)} - \frac{\alpha_5 p_3}{t_3-1}.
\end{aligned} \tag{12}$$

2 変数の場合と同様に，次が従う．

Theorem 3.2. 得られた *Hamiltonian* $H_i (i = 1, 2, 3)$ に対応する t_i-*flow* は互いに可換である．

4 n 変数量子 Garnier 系

$n = 3$ の場合の結果より，一般の n 変数量子 Garnier 系について考える．

Definition 4.1. $i = 1, \ldots, n+4$ に対して，*original chart* 上の座標 $(q, p) = (q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)$ と i 番目の変換された *chart* 上の座標 $(x, y) = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ との関係を与える変換 r_i を次のように定義する．

$$r_i: \quad q_i = -(x_i y_i - \alpha_i) y_i, \quad p_i = \frac{1}{y_i}, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

$$r_i: \quad q_j = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1} & (j = 1), \\ \dfrac{x_j}{x_1} & (j \neq 1), \end{cases} \quad p_j = \begin{cases} -x_1(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \alpha_i) & (j = 1), \\ x_1 y_j & (j \neq 1), \end{cases} \quad (i = n+1, n+2). \tag{14}$$

$$r_{n+3}: \quad q_j = \begin{cases} 1 + y_1^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i y_1 - \alpha_{n+3}) y_1 & (j = 1), \\ x_j & (j \neq 1), \end{cases} \tag{15}$$

$$p_j = \begin{cases} \dfrac{1}{y_1} & (j = 1), \\ y_j + \dfrac{1}{y_1} - y_1 & (j \neq 1). \end{cases} \tag{16}$$

$$r_{n+4}: \quad q_j = \begin{cases} t_1 + t_1 y_1^2 - \sum_{i=2}^{n} \dfrac{t_1}{t_i} x_i - (\sum_{i=1}^{n} \dfrac{t_1}{t_i} x_i y_1 - \alpha_{n+4}) y_1 & (j = 1), \\ x_j & (j \neq 1), \end{cases} \tag{17}$$

$$p_j = \begin{cases} \dfrac{1}{y_1} & (j = 1), \\ y_j + \dfrac{t_1}{t_j}(\dfrac{1}{y_1} - y_1) & (j \neq 1). \end{cases} \tag{18}$$

Remark 4.1. r_i における座標 (x, y) と r_j における座標 (x, y) とは区別する必要がある．また，i 番目の変換 r_i はパラメータ α_i に，r_{n+4} は時間変数 $t_1, \ldots, t_n$ に依存するものである．

これらの変換 $r_1, \ldots, r_{n+4}$ は 古典の場合の変換 [19] の一般化である．各変換 r_i は双有理正準変換であり，その逆変換は (q, p) を (x, y) に置き換えたものである．このとき，次が予想できる．

Conjecture 4.1. 正準変数 $q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n$ に関する非可換 *Hamiltonian* H_i を持つ多項式 *Hamilton* 系を考え，以下を仮定する：

1. *Hamiltonian* H_i の次数の合計は $q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n$ に関して 5 次.
2. 対応する変換 r_i の下で，この系は多項式 *Hamiltonian* を持つ *Hamilton* 系に再び変換される．

このとき，そのような *Hamiltonian* H_i は次のようにただ一つに決まる.

$$\begin{aligned} t_i(t_i - 1)\kappa H_i =& q_i \Big(\sum_{j=1}^{n} q_j p_j + a_{n+1} \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} q_j p_j + a_{n+2} \Big) \\ &+ \Big\{ q_i(a_{n+3} t_i + a_{n+4} - \kappa) + (t_i - t_i q_i - q_i) v_i \Big\} p_i \\ &- \sum_{j(\neq i)=1}^{n} \Big\{ q_j v_i (p_j X_{i,j} + p_i \tilde{X}_{i,j}) + q_i v_j (p_i X_{i,j} + p_j X_{j,i}) \Big\}, \end{aligned} \tag{19}$$

ここで，

$$v_i = q_i p_i - a_i, \quad \kappa = \sum_{i=1}^{n+4} a_i - h, \quad X_{i,j} = \frac{t_i(t_j - 1)}{t_j - t_i}, \quad \tilde{X}_{i,j} = \frac{t_i(t_i - 1)}{t_i - t_j}.$$

この予想に対して，$n \leq 8$ までは確認済みである．

Remark 4.2. 量子 *Hamiltonian* (19) は既知の古典的な *Garnier* 系の *Hamiltonian* の *[8, 3]* の量子化とみなすことができる．

参考文献

[1] B. Gambier, *Sur les équations difféf́retielles du second ordre et du premier degré dont l' intégrale générale est á points critiques fixes.*, Acta. Math. **33**(1910), 1-55.

[2] R. Garnier, *Sur des équations différentielles du troisiéme ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Ann. Ecole Norm. Sup., **29** (1912), 1-126.

[3] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé −A modern theory of special functions−, Aspects of Mathematics, **E16**, Vieweg (1991) ISBN 978-3-322-90165-1.

[4] H. Kawakami, *Four-Dimensional Painlevé-Type Equations Associated with Ramified Linear Equations III: Garnier Systems and Fuji-Suzuki Systems*, SIGMA, **13** (096) (2017), 1-50.

[5] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, *Toward a classification of four-dimensional Painlevé equations*, in: Algebraic and geometric aspects of integrable systems and random matrices, eds. A. Dzhamay, K. Maruno and V.U. Pierce, Contemp. Math., **593** (Providence: American Mathematical Society, 2013), 143-161.

[6] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, *Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations*, MSJ Memoirs, **37** (2018), 25-111.

[7] H. Kimura, *The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure*, Ann. Mat. Pura Appl., **155** (1989), 25-57.

[8] H. Kimura, *Uniform foliation associated with the Hamiltonian system* $\mathcal{H}_n$, Anali. Scuola Norm. Sup. di Pisa, **20** (1993), 1-60.

[9] H. Kimura, *On the initial value spaces of degenerate Garnier system*, RIMS Kokyuroku, (2000), 18-27.

[10] H. Kimura and K. Okamoto, *On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier systems*, J. Math. Pures Appl., **63** (1984), 129-146.

[11] T. Matano, A. Matumiya and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems II*, J. Math. Soc. Japan, **51** (1999), 766-843.

[12] A. Matumiya, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems III*, Kumamoto J. Math., **10** (1997), 45-73.

[13] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, *Bäcklund transformations and the manifolds of Painlevé systems*, Funkcial. Ekvac., **45** (2002), 237-258.

[14] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre á points critiques fixes de P. Painlevé*, Jap. J. Math., 5 (1979), 1-79.

[15] K. Okamoto, *Painlevé equations*, (in Japanese) Iwanami, (2009) ISBN 978-4-00005836-0.

[16] P. Painlevé, *Sur les équations differetielles du second ordre dont l' intégrale générale et uniforme*, Oeuvret. III, 187-271.

[17] Y. Sasano, *Studies on the Garnier system in two variables*, arXiv:0704.2869.

[18] Y. Sasano, *Symmetric Hamiltonian of the Garnier System and its degenerate systems in two variables*, arXiv:0706.0799.

[19] Y. Sasano and Y. Yamada, *Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B2** (2007), 215-225.

[20] T. Shioda and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I*, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), 271-291.

[21] M. Suzuki, *On the initial value spaces of degenerate Garnier system in two variables*, RIMS Kokyuroku, (2001), 41-52.

[22] M. Suzuki, *Space of initial conditions of Garnier system and its degenerate systems in two variables*, J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), 1079-1117.

[23] K. Takano, *Defining manifolds for Painlevé equations*, in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear and nonlinear* (Eds. C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei), Kyoto Univ. Press, (2000), 261-269.

[24] T. Tsuda, *Birational symmetries, Hirota bilinear forms and special solutions of the Garnier systems in 2-variables*, J. Math .Sci. Univ. Tokyo, **10** (2003), 355-371.

[25] T. Tsuda, *Rational solutions of the Garnier system in terms of Schur polynomials*, IMRN, **43** (2003), 2341-2358.

[26] T. Tsuda, *Universal characters and integrable systems*, PhD thesis. The University of Tokyo, (2003).

[27] T. Tsuda, *Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system*, Advances in Mathematics, **206** (2006), 657-683.

[28] Y. Ueno, *Polynomial Hamiltonians for quantum Painlevé equations*, Int. J. Math., **20** (2009), 1335-1445.

[29] Y. Ueno, *Polynomial Hamiltonians for quantum Garnier systems in two variables*, preprint, arXiv:2306.00993.